Lipsă Nr. 1,6

No. 8793

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL XV. No. 2 1 NOEMBRIE 1948

9693

SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIŢEI, 158. BUCUREŞTI 2. — TELEFON 7-3803

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL XV. No. 2 — 1 NOEMBRIE 1948

ABONAMENTUL LEI 360 PE AN (9 numere)

Soluţii şi orice corespondenţă pe adresa: ING. C. IONESCU-ŢIU

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

EXERCIŢII REZOLVATE [1]

Clasa a III-a. *Exerc. 346. Un capital a fost desfăcut în două părţi, astfel că una este triplul celeilalte şi dat la dobândă: partea cea mică cu 5% pe 6 ani şi cealaltă, cu 3% pe 2 ani; prima parte a adus cu 58,44 lei mai mult dobândă ca a doua. Care a fost capitalul?*

N. M.

Soluţie. Presupunem că am fi depus la dobândă, în condiţiile enunţului 100 lei şi 300 lei; dobânzile ar fi fost

$$\frac{100 \times 5 \times 6}{100} = 30 \quad \text{şi} \quad \frac{300 \times 3 \times 2}{100} = 18.$$

Partea întâia ar fi adus cu 12 lei mai mult decât a doua. Dacă 12 lei provine dela 400 lei dar 58,44 lei de unde provine? Aplicăm regula de trei simplă

$$\begin{array}{ll} 12 \ldots\ldots & 400 \\ 58{,}44 \ldots\ldots & x \end{array} \qquad x = \frac{58{,}44 \times 400}{12} = \frac{5844}{3} = 1948.$$

Suma depusă a fost de *1948 lei.*

Clasa a IV-a. *Exerc. 865. Pe suprafaţa laterală a unui cilindru de fier, introdus într'o soluţie se depune o crustă groasă de 1 mm; cilindrul are astfel 1199,17098 g. El este confecţionat dintr'o prismă exagonală lungă de 12 cm şi cu baza de 13,84 cm^2. Care este densitatea substanţei depuse pe cilindru?*

(Se va lua densitatea fierului 7,8 şi $\pi = 3{,}141$).

H. D.

Soluţie. Notăm cu l şi cu a latura şi apotema exagonului de bază; avem $l = \frac{2a}{\sqrt{3}}$ deci $S = 3la = 2\sqrt{3} \cdot a^2 = 13{,}84$

1) In această rubrică publicăm numai schiţe de soluţii.

rezultă $a = 2$ cm; a este şi raza cilindrului. Volumul cilindrului înainte de a fi introdus în soluţie este 150,768 cm³ şi greutatea lui 1175,9904 g. Greutatea crustei este 23,18058 g. După ce a fost introdus în soluţie cilindrul are $R = 2{,}1$ cm şi volumul 166,2217 cm³ deci volumul crustei este 15,45372 cm³. Densitatea crustei este

$$D = \frac{G}{V} = \frac{23{,}18058}{15{,}45372} = 1{,}5.$$

Clasa a V-a. *Exerc. 1050. Fie* MT, MT' *tangentele duse din* M *la cercul de centru* O *şi* A, B *intersecţiile cercului cu* MO. *Punctul* A *este între* O *şi* M. *Se construeşte triunghiul isoscel* ATC *cu vârful în* T *şi cu baza pe* AB. *Dacă* N *este a doua intersecţie a cercului* O *cu* TC *atunci* AN *este paralelă cu* MT'

GH. B.

Soluţie redactată după d-l CLAUDIU IONESCU BUJOR. Pentru a arăta că AN || MT' este de ajuns să demonstrăm că $\sphericalangle$ MT'A $=$ $\sphericalangle$ T'AN, adică arc AT' = arc T'N.

Din faptul că diametrul AB este perpendicular pe coarda TT' rezultă că TT' este înălţime şi bisectoare în triunghiul isoscel ATC. Deci $\sphericalangle$ ATT' = $\sphericalangle$ NTT' şi deci arc AT' = arc T'N. Adică AN || MT'.

V. 1078. Se consideră un cerc O, *un diametru* AB *şi tangenta în* A *la cerc. Să se ducă o secantă la cerc, perpendiculară pe tangenta în* A, *care să se intersecteze cu cercul în* M, N, *iar cu tangenta, în* P *astfel încât* AN *să fie bisectoarea unghiului* MAP.

V. GH.

Soluţie redactată după d-l K. TELEMAN. Pentru ca $\sphericalangle$ NAP $=$ $\sphericalangle$ NAM trebue ca arcele AN şi NM să fie egale. Dar arcul AN = arcul MB. Deci secanta MN este latura exagonului regulat înscris în cercul O.

Clasa a VI-a. *Exerc. 1053. Să se arate că* a, b, c *fiind arce oarecare, avem*

$$\sin(a-b)\sin(a+b)+\sin(b-c)\sin(b+c)+\sin(c-a)\sin(c+a)=0,$$

$$\sin(a-b)\cos(a+b)+\sin(b-c)\cos(b+c)+\sin(c-a)\cos(c+a)=0.$$

C. I. Ţ.

Soluție dată de d-l EPIFAN AMOHNOAIE. Inmulțim expresiile cu 2 și atunci avem

$$\cos 2b - \cos 2a + \cos 2c - \cos 2b + \cos 2a - \cos 2c = 0,$$

$$\sin 2a - \sin 2b + \sin 2b - \sin 2c + \sin 2c - \sin 2a = 0.$$

VI. 1072. Să se arate că avem

$$\frac{\cos x \pm i \sin x}{\cos y \pm i \sin y} + \frac{\cos y \pm i \sin y}{\cos x \pm i \sin x} = 2\cos(x - y)$$

$$\frac{\cos x \pm i \sin x}{\cos y \pm i \sin y} - \frac{\cos y \pm i \sin y}{\cos x \pm i \sin x} = \pm 2i \sin(x - y).$$

unde $i^2 = -1$. *Semnele se corespund.*

C. I. Ț.

Soluție dată de d-l KOSTAKE TELEMAN. Inmulțim numitorii primei identități prin conjugata respectivă; numitorii devin egali cu 1 și avem

$$(\cos x \pm i \sin x)(\cos y \mp i \sin y) + (\cos y \pm i \sin y)(\cos x \mp i \sin x)$$
$$= 2(\cos x \cos y + \sin x \sin y) = 2\cos(x - y).$$

La a doua relație procedăm la fel.

VI. 1073. Dacă unghiurile A, B, C *ale unui triunghiu sunt în progresie aritmetică, în această ordine, atunci*

$$\operatorname{tg} C = \frac{\sqrt{3} + 2\sin 2B}{1 - 2\cos 2B}.$$

N. M.

Soluție dată de d-l ARISTIDE I. DELEANU. Relația de verificat se poate simplifica, transformându-i membrul al doilea în produs

$$\frac{\sqrt{3} + 2\sin 2B}{1 - 2\cos 2B} = \frac{\sin 60^0 + \sin 2B}{\cos 60^0 - \cos 2B} = \operatorname{cotg}(B - 30^0) = \operatorname{tg}(120^0 - B)$$

dar din $2A = B + C = 180^0 - A$ rezultă $A = 60^0$ și $C = 120^0 - B$, ceea ce justifică relația de demonstrat.

Clasa a VII-a. *Exerc. 1012. Să se rezolve sistemul de ecuaţii*

$$x + ay + a^2z + a^3u = 1 \quad , \quad x + by + b^2z + b^3u = 1,$$
$$x + cy + c^2z + c^3u = 1 \quad , \quad x + dy + d^2z + d^3u = 1.$$

V. C.

Soluţie dată de d-l VIOREL A. VISARION. Considerăm ecuaţia

$$f(\theta) = u\theta^3 + z\theta^2 + y\theta + x - 1 = 0$$

conform sistemului dat, ecuaţia aceasta de gradul trei se anulează pentru 4 valori: a, b, c, d deci $f(\theta) = 0$ se reduce la o identitate. Rezultă

$$x = 1 \quad , \quad y = z = u = 0.$$

Dacă a, b, c, d nu sunt toate distincte, de ex. $d = c$, atunci scriind relaţiile dintre coeficienţii x, y, z, u şi rădăcinile a, b, c avem

$x = 1 - kabc$, $y = k(ab + bc + ca)$, $z = -k(a + b + c)$, $u = k$, k fiind arbitrar.

VII. 1041. Să se calculeze determinantul

$$D \equiv \begin{vmatrix} \sin 2a & \sin 2b & \sin 2c \\ \cos 2a & \cos 2b & \cos 2c \\ \operatorname{tg} a & \operatorname{tg} b & \operatorname{tg} c \end{vmatrix}.$$

V. C.

Soluţie[1]. Notăm $\operatorname{tg} a = \alpha$, $\operatorname{tg} b = \beta$, $\operatorname{tg} c = \gamma$ şi avem

$$\sin 2a = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} \quad , \quad \cos 2a = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}, \text{ etc.}$$

Determinantul devine, însemnând $k = \cos^2 a \cos^2 b \cos^2 c$

$$D^{2)} = k \begin{vmatrix} 2\alpha & \alpha & 1 \\ 1-\alpha^2 & 1-\alpha^2 & \alpha \\ \alpha+\alpha^3 & \alpha^3 & \alpha^3 \end{vmatrix} = 2k \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1-\alpha^2 & \alpha \end{vmatrix} = -2k \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \alpha \\ \alpha^3 & \alpha^2 \end{vmatrix} - 2k\alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \alpha \\ \alpha^2 & \alpha^2 \end{vmatrix} = -2k \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \alpha \\ \alpha^2 & \alpha^2 \end{vmatrix} \times$$

$$(\alpha+\beta+\gamma+\alpha\beta\gamma) = -2k(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha+\beta+\gamma+\alpha\beta\gamma).$$

---

1) Redactată după soluţia d-lui GH. PĂUNESCU.

2) Am notat numai prima coloană a determinantului. Celelalte se deduc analog.

Clasa a VIII-a. *Exerc. 945* [1]. *Intr'o elipsă de semiaxe* a, b *fie* r, r' *razele vectoare ale unui punct* M *şi* ρ *lungimea semidiametrului lui* M.

Avem $\rho^2 + rr' = a^2 + b^2$. N. M.

Soluţie dată de d-l C. A. COVALSCHI. Fie M (x, y) punctul de pe elipsă şi M' (x', y') capătul diametrului conjugat; în baza relaţiilor lui CHASLES

$$y' = \frac{b}{a}x \quad , \quad x' = -\frac{a}{b}y = -\sqrt{a^2 - x^2}$$

avem $\overline{OM'}^2 = x'^2 + y'^2 = a^2 - \frac{c^2 x^2}{a^2} = \left(a + \frac{cx}{a}\right)\left(a - \frac{cx}{a}\right) = rr'.$

Relaţia de demonstrat se reduce la teorema APOLLONIUS

$$\overline{OM}^2 + \overline{OM'}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2.$$

Observare. Demonstraţia dată convine şi cazului iperbolei pentru care

$$\rho^2 - rr' = a^2 - b^2$$

[S. E. G. M. Ex. VIII 954]. Această relaţie se reduce la

$$\rho^2 = rr'$$

în cazul iperbolei echilatere, ceeace traduce proprietatea $\overline{OM} = \overline{OM'}$

VIII. 959. Să se rezolve sistemul

$$\frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} + \frac{1}{xy} = -\frac{1}{45}, \quad \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z} = -\frac{161}{10}, \quad x + y + z = 2.$$

V. C.

Soluţie [2]. Sistemul se mai poate scrie

$$x + y + z = 2 \quad , \quad 45(x + y + z) + xyz = 0,$$

$$10[(yz + zx + xy)^2 - 2xyz(x + y + z)] + 161\, xyz = 0$$

care ne dă

$$x + y + z = 2 \quad , \quad xy + yz + zx = \pm 33 \quad , \quad xyz = -90.$$

x, y, z sunt deci rădăcinile ecuaţiei

$$u^3 - 2u^2 \pm 33u + 90 = 0.$$

---

1) Enunţ parţial. Restul enunţului se verifică prin calcul direct fără dificultate.

2) Redactată după soluţia d-lui C. P. POPOVICI.

Luând semnul —, întrebuinţând metoda determinării rădăcinilor întregi, obţinem

$$u_1 = 3 \quad , \quad u_2 = 5 \quad , \quad u_3 = -6.$$

Ecuaţia a doua nu are rădăcini raţionale. Intrebuinţând procedeele de aproximaţie obţinem $u = -2{,}14$. Celelalte rădăcini sunt de forma $a \pm bi$; scriind suma şi produsul rădăcinilor avem

$$a = 2{,}07\,; \quad b = 6{,}13.$$

VIII. 990 Fie o călimară formată dintr'un vas cubic de latură a pe care este un cilindru de rază $\frac{a}{3}$ *şi înălţime* $\frac{2a}{3}$. *Să se determine poziţia centrului de greutate.*

Presupunând greutatea călimării G, *să se determine ce lungime poate avea o bară de greutate tot* G *pentru ca această călimară cu bara în ea, rezemându-se în mijlocul unei laturi a bazei şi de buza superioară să nu se răstoarne.* G. Ţ.

Soluţie. [1] 1°. Fie I, J, K, centrele de greutate ale cubului, cilindrului $\left(\text{de volum } \frac{2\pi a^3}{27}\right)$ şi călimării. Din cauza simetriei K este situat pe axa IJ la distanţa x deasupra lui I pe care o determinăm luând momentele în K; avem

$$a^3 x = \frac{2\pi a^3}{27}\left(\frac{5a}{6} - x\right) \quad , \quad x = \frac{5a\pi}{6\pi + 81}.$$

2°. Asupra sistemului lucrează greutatea G, a călimării, aplicată în K şi greutatea G aplicată în mijlocul M al barei. Rezultanta lor trebue să taie poligonul de bază, adică momentul forţei de echilibru din K, faţă de planul de răsturnare trebue să întreacă momentul forţei din M:

$$G \cdot \frac{a}{2} \geqq G\left(\frac{l}{2}\cos\alpha - a\right)$$

l fiind lungimea barei, iar α ($\operatorname{tg}\alpha = 2$), unghiul ei cu planul de bază. Rezultă

$$l \leqq 3a\sqrt{5}$$

relaţie care limitează lungimea barei.

---

1) Redactată după soluţia d-lui P. P. TEODORESCU.

Exerciţii generale. *Exerc. 835. Să se elimine* α *şi* β *între ecuaţiile*

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0, \quad x\cos\beta + y\sin\beta - p = 0,$$

$$x_0\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + y_0\sin\frac{\alpha+\beta}{2} - p\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 0.$$

V. C.

Soluţie. Prin scăderea primelor două ecuaţii obţinem

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{y}{x}$$

deci $$\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Adunarea aceloraşi relaţii ne dă

$$x\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + y\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{p}{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}$$

deci $$\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{p}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

substituim în ultima ecuaţie şi avem

$$xx_0+yy_0=p^2.$$

Altă soluţie.[1] Notăm $x=y\operatorname{tg}\varphi$; primele două relaţii devin

$$\sin(\alpha+\varphi) = \sin(\beta+\varphi) = \frac{p}{y}\cos\varphi$$

deci $$\alpha+\beta+2\varphi = \pi$$

căci $\alpha \neq \beta$. Rezultă

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin\varphi, \ \sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \cos\varphi, \ \cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{p}{y}\cos\varphi$$

ecuaţia a treia devine

$$x_0\operatorname{tg}\varphi + y_0 - \frac{p^2}{y} = 0$$

sau $$xx_0 + yy_0 - p^2 = 0.$$

1) Redactată după soluţia d-lui SILVIU A. TELEMAN.

E. G. 846. Să se arate că avem relația

$$\Sigma \sin A \cos B \cos C \sin 2(B - C) =$$

$$-4 \sin A \sin B \sin C \sin(A - B) \sin(B - C) \sin(C - A).$$

A, B, C fiind unghiurile unui triunghiu. V. C.

Soluție dată de d-l P. P. TEODORESCU. Dacă în identitatea

$$\Sigma x(x^2+1)(y-z)(1+yz) = -(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z+xyz)$$

înlocuim $x = \operatorname{tg}\alpha, y = \operatorname{tg}\beta, z = \operatorname{tg}\gamma$, obținem identitatea

$$\Sigma \sin\alpha \cos\beta \cos\gamma \sin 2(\beta - \gamma) =$$

$$-2 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma \sin(\alpha - \beta) \sin(\beta - \gamma) \sin(\gamma - \alpha)$$

$$\times (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma)$$

care se reduce la identitatea din enunț, când $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$.

Soluția a doua, dată de d-l G. PĂUNESCU. Considerăn determinantul

$$D = \begin{vmatrix} \sin 2A \cos A & \sin 2B \cos B & \sin 2C \cos C \\ \cos 2A \cos A & \cos 2B \cos B & \cos 2C \cos C \\ \sin A & \sin B & \sin C \end{vmatrix}.$$

Desvoltând acest determinant după elementele ultimei linii, obținem prima parte a relației de verificat. Dând factor comun pe $\cos A \cos B \cos C$ rămâne determinantul din exercițiul VII. 1041, a cărui valoare este

$$-2\Pi \cos^3 A \cdot \Pi(\operatorname{tg}A - \operatorname{tg}B) \cdot (\Sigma \operatorname{tg}A + \Pi \operatorname{tg}A);$$

această expresie, pentru $A + B + C = 180^0$ se reduce la partea a doua a relației din enunț.

E. G. 861. Fie M *un punct mobil pe cercul de diametru* AB. *Se iau pe* BM *punctele* P, P′ *așa încât* $PM = P'M = AM$. *Perpendiculara pe mijlocul lui* AB *întâlnește cercul dat în* D *și* D′. *Să se arate că, dacă se notează convenabil punctele* D, D′ *atunci triunghiurile* DAP *și* D′AP′ *sunt isoscele.* GH. B.

Soluție. Triunghiul AMP este isoscel prin construcție. Apoi $\sphericalangle AMP = 45^0$ deci MD este bisectoare și înălțime în triunghiul AMP; deci va avea aceleași roluri și în triunghiul ADP care va fi de asemenea isoscel.

Analog se arată că și triunghiul D′AP′ este isoscel. De altfel, având și $\overline{AD} = \overline{AD'}$, triunghiurile ADP, AD′P′ sunt egale.

Până la 5 Octombrie 1948, am primit soluții bune la exercițiile propuse în numărul 1, vol. XV, dela[1]:

Liceul teoretic de băieți Nr. 2, București.

Clasa a VIII-a: Bedrosian C. Bedros (VIII: 1085, 7, 8, 90*); Dudcovschi I. Petre (VIII: 1081*, 3*); Zaidman D. Sami (VIII: 1081, 3*, 5, 8, 9*, 90*, IX: 1102, 7).

Clasa a XI-a: Lenz N. Friedrich (XI: 991, 2, 3*, 4, 5, 6*, 7*, 8, 9, 1000*, E. G.: 871*, A: 4, 5); Păunescu Șt. Gheorghe (XI: 991*, 2*, 3*, 4, 5*, 6*, 7, 8, 9, 1000*, E. G.: 871, 2, 6*, 7*, 9*, 80*).

Particulari-București.

Clasa a VIII-a: Teleman A. Kostake (VIII: 1081, 2*, 3*, 4*, 5, 6*, 7, 8, 9*, 90*, IX: 1101*, 2*, 3, 4, 5, 6*, 7, 8*, 9*, 10*, X: 1061*, 2*, 3, 4*, 5, 6, 8, XI: 991*, 2*, 3*, 4, 5, 6*, 9*, E. G.: 871*, 2, 6*, 7*, 8*, 9*, 80*, A: 1, 2, 4, 5).

Liceul teoretic din Oradea Mare.

Clasa a IX-a: Ciupa L. Sorin (IX: 1102, 3, 5*).

Liceul de fete din Ploești.

Clasa a X-a: Căluşiță I. Mioara (X: 1061, 2*, 3, 5, 6*, 7, 8, 9, A: 2, 5).

Liceul mixt, Râmnicul-Sărat.

Clasa a XI-a: Popescu D. Pavel (XI: 995, 7*, 8, A: 4, 5).

Liceul din Slatina-Olt.

Clasa a X-a: Constantinescu I. Gheorghe (X: 1063, 5, 7, 8*, A: 5).

EXERCIȚII PROPUSE

Soluțiile exercițiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 Februarie 1949

Clasa VI-a. *Exerc. 4.* Dela 1 Octombrie s'a redus prețul de vânzare la mai multe articole. Carnea se vinde cu 70 lei kg. dela 116 și pastele făinoase cu 40 lei kg. dela 57. In modul acesta, cumpărând de două ori mai multe kilograme de paste făinoase decât de carne am economisit 240 lei. Cât m'ar fi costat cumpărătura, înainte de 1 Octombrie?

N. M.

---

1) Semnul* însoțește numărul unui exercițiu foarte bine rezolvat și foarte îngrijit redactat.

VI. 5. Să se verifice că

$$100.001 \times 99.999 + 1 = 100.000^2$$

N. M.

VI. 6. Cumpăr 20 kg. mere şi 30 kg. prune pentru marmeladă şi plătesc 600 lei. Dacă cumpăram 30 kg. mere şi 15 kg. prune, plăteam aceeaş sumă. Să se afle cât am plătit kilogramul de mere şi de prune.

E. M.

Clasa a VII-a. *Exerc. 367.* Să se arate că:

$$\frac{\left(5+\frac{2}{3}\right)^2+2\times\left(25-\frac{4}{9}\right)+\left(5-\frac{2}{3}\right)^2}{\left(5+\frac{2}{3}\right)^2-2\times\left(25-\frac{4}{9}\right)+\left(5-\frac{2}{3}\right)^2}-25:\frac{4}{9}$$

E. M.

VII. 368. Fie numerele de forma $5\,a\,4\,b$. Să se înlocuiască literele prin cifre, astfel ca numerele căpătate să fie divizibile cu 6.

E. M.

VII. 369. In trapezul dreptunghic ABCD (A şi D drepte), $\overline{CD}=2\,\overline{AB}$. Dacă prelungim diagonala DB cu $\overline{BD'}=\overline{DB}$, triunghiul DCD' este dreptunghic.

E. M.

Clasa a VIII-a. *Exerc. 1091.* Lichidând un comerţ, un negustor realizează suma de lei 138.000 pe care-i împarte la cei doi copii ai săi în vârstă de 5 şi 20 ani, proporţional cu vârstele. Aceste sume le depune la aceeaşi bancă cu o dobândă de 10%. Să se afle în cât timp se vor dubla.

E. M.

VIII. 1092. Două cercuri secante sunt astfel încât coarda lor comună AB este latura comună pentru două triunghiuri echilaterale înscrise în cele două cercuri.

Să se arate cum se pot construi două astfel de cercuri.

Prin punctul A se duce o secantă arbitrară, care tae cele două cercuri în alte două puncte C, D.

Să se demonstreze că triunghiul BCD este echilateral.

C. C.

VIII. 1093. Două cercuri secante sunt astfel încât coarda lor comună AB este latura unui exagon regulat înscris în unul din cercuri și latura unui triunghiu echilateral înscris în al doilea cerc.

Să se dea o construcție pentru două astfel de cercuri.

Prin punctul A se duce o secantă oarecare, care mai tae cele două cercuri în punctele C, D.

Să se arate că triunghiul BCD este dreptunghic.

C. C.

VIII. 1094. In dreptunghiul ABCD se dă:

$$\overline{AB} = 8 \text{ cm. și } \overline{BC} = 6 \text{ cm.}$$

Fie E și F proiecțiile vârfurilor A și C pe diagonala BD. Să se afle perimetrul și aria paralelogramului AECF.

E. M.

VIII. 1095. Prin vârfurile A, B ale pătratului ABCD, de latură l ducem două drepte care fac unghiuri de 60^0 cu latura AB; aceste drepte se taie în E și taie pe DC în F și G. Să se afle aria triunghiului EFG.

N. M.

VIII. 1096. Să se arate că

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$$x^8 + x^4 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^6 - x^5 + x^3 - x + 1)$$

$$3x^4 - x^3 + 3x - 1 = (x^2 - x + 1)(3x^2 + 2x - 1)$$

$$(x^4 + 1)(x^3 - 1) = (x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1)(x - 1).$$

C. I. Ț.

VIII. 1097. Fie:

$$E_1 = (a - b + c)^2 + (a + b - c)^2 - 2(b - c)^2$$

$$E_2 = (a + b + c)^2 + (a - b - c)^2 - 2(b + c)^2$$

să se arate că:

$$E_1 = E_2 .$$

E. M.

VIII. 1098. Să se arate că

$$\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}=x\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)$$

C. I. Ţ.

VIII. 1099. Un triunghiu dreptunghic ABC este înscris într'un semicerc. Înălţimea AD şi segmentul BD de pe ipotenuză, se înseamnă respectiv cu x şi y.

Jumătatea înălţimii micşorată cu $\frac{3}{4}$ din diferenţa dintre ea şi segmentul considerat dă $\frac{5}{28}$ din suma lor, iar jumătatea diferenţei lor micşorată cu $\frac{1}{7}$ din suma lor este -1.

Se cere:

1°. Să se pună problema în ecuaţie şi să se rezolve sistemul aflat.

2°. Să se calculeze latura şi suprafaţa triunghiului echilateral înscris în acelaşi cerc.

3°. Să se calculeze diferenţa dintre volumul sferii şi corpului format prin rotirea semicercului în jurul diametrului său.

H. D.

VIII. 1100. Un turn înalt de 10 m. este format dintr'un cilindru cu raza de 3 m. terminat cu un con. Volumul lui este de 207,240 m^3. Să i se afle aria.

N. M.

Clasa a IX-a. *Exerc. 1111.* Să se arate că

$$\Sigma(1\pm a)^2(1\mp b)(1\mp c)(b-c)+4(a-b)(b-c)(c-a)=0$$

Semnele se corespund.

C. I. Ţ.

IX. 1112. Dacă $a^2=b^2+c^2$ atunci expresia

$$E\equiv 2(a-b)(a-c)$$

este un patrat perfect

G. D. S.

IX. 1113. Să se determine a, b, c astfel ca polinomul

$$P(x) = x^4 + x^3 + ax^2 + bx + c$$

împărţit succesiv prin $x-1$, $x-2$, $x-3$ să dea respectiv resturile 1, 2 şi 3.

I. I. S.

XI. 1114. Să se arate că:

$$\frac{1-a}{1+a} + \frac{1-a^2}{1+a^2} + \frac{a^3-1}{a^3+1} = \frac{(1-a)(1-a^2)(1-a^3)}{(1+a)(1+a^2)(1+a^3)}.$$

C. I. Ţ.

IX. 1115. Să se rezolve ecuaţia

$$\frac{a+b}{a-x} + \frac{a-b}{b-x} = \frac{a^2+b^2}{ab}.$$

I. I. S.

IX. 1116. Există numere complexe ale căror inverse să fie respectiv egale cu conjugatele lor? In caz afirmativ să se dea câteva exemple de astfel de numere.

E. V.

IX. 1117. Să se studieze natura rădăcinilor ecuaţiei

$$x^2 - 2mx + 3(m^2 - 2) = 0,$$

când parametrul m variază dela $-\infty$ la $+\infty$.

E. V.

IX. 1118. Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A, şi se duce perpendiculara AD pe ipotenuză. Fie E şi F proiecţiile punctului D pe catetele AB, AC respectiv, iar E' şi F' proiecţiile punctelor E şi F pe ipotenuză.

Să se demonstreze că triunghiul AE'F' este isoscel.

C. C.

IX. 1119. Intr'un triunghiu dreptunghic ABC cu suprafaţa de 30m^2, diferenţa catetelor este cu 6 unităţi mai mică decât ipotenuza. Fie E şi F proiecţiile piciorului înălţimii pe cele două catete. Se cere aria dreptunghiului AEDF.

E. M.

IX. 1120. In triunghiul dreptunghic ABC fie D piciorul înălțimii coborîte din A pe ipotenuză și E simetricul lui D față de A; cercul BEC retaie pe AD în F. Să se arate că

$$\overline{DF} = \frac{1}{2}\overline{AD}.$$

N. M.

Clasa a X-a. *Exerc. 1071.* Să se determine trei numere în progresie aritmetică, știind că suma primelor două numere este 7 iar produsul ultimelor două este 40.

E. M.

X. 1072. Să se determine x știind că numerele

$$ax - \frac{1}{ax}, \quad a - \frac{1}{a}, \quad \frac{a}{x} - \frac{x}{a}$$

sunt în progresie geometrică.

I. I. S.

X. 1073. Să se calculeze suma

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{b}} + \frac{\sqrt[m]{a^{1-m}}}{\sqrt[n]{b^{1-n}}} + \frac{\sqrt[m]{a^{1-2m}}}{\sqrt[n]{b^{1-2n}}} + \ldots + \frac{\sqrt[m]{a^{1-pm}}}{\sqrt[n]{b^{1-pn}}}.$$

I. I. S.

X. 1074. Să se arate că expresia:

$$E = \cos x + \sin x$$

crește în mod *continuu*, când x crește dela 0^0 la 45^0, și descrește în mod *continuu*, când x crește dela 45^0 la 90^0.

Să se facă un studiu analog pentru această expresie, presupunând că x este cuprins într'unul din celelalte trei cadrane.

C. C.

X. 1075. Pe laturile unui triunghiu echilateral de mărime dată se construesc patrate. Se cere să se calculeze latura triunghiului echilateral căpătat prin unirea centrelor celor trei patrate.

Aplicație:

$$l_3 = 4 \text{ cm}.$$

E. M.

X. 1076. Intr'un triunghiu oarecare avem:

$$a \operatorname{cotg} A \cos B = b \operatorname{cotg} B \cos A = \frac{c}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}$$

$$a \operatorname{cotg} A \cos C = c \operatorname{cotg} C \cos A = \frac{b}{\operatorname{tg} C + \operatorname{tg} A}$$

$$\frac{\cos A}{\cos B} = \frac{1}{(\operatorname{tg} C + \operatorname{tg} A) \operatorname{cotg} B \cos C} = \operatorname{cotg} A \cos C (\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C).$$

C. I. Ţ.

X. 1077. Dacă într'un triunghiu există relaţia

$$\cos 2B + \cos 2C = 2 \cos A$$

triunghiul este dreptunghic

I. I. S.

X. 1078. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$x(-a+b+c) = y(a-b+c) = z(a+b-c) = \frac{4xyz}{a+b+c}.$$

Dacă se presupune că *a, b, c,* reprezintă lungimile laturilor unui triunghiu, să se dea o interpretare geometrică soluţiilor acestui sistem.

C. C.

X. 1079. Fie A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor şi S suprafaţa unui triunghiu oarecare ABC şi H intersecţia înălţimilor, şi A' piciorul înălţimii din A.

Să se arate că:

$$\overline{AB_1^2} - \overline{B_1H^2} = \overline{BC_1^2} - \overline{C_1H^2} = \overline{CA_1^2} - \overline{A_1H^2} = \overline{AH} \cdot \overline{HA'} = \frac{2S}{\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C}$$

C. I. Ţ.

X. 1080. Se dau două plane P şi Q, neparalele. In planul P se ia un triunghiu oarecare T, care se proiectează ortogonal pe planul Q după triunghiul T'. De asemenea triunghiul T' se proiectează ortogonal pe planul P după triunghiul T''.

Să se arate că dacă planele P şi Q fac un unghiu de 45°, atunci aria triunghiului T'' este $\frac{1}{2}$ din aria triunghiului T; dacă cele două plane fac un unghiu de 60°, atunci aria lui T'' este $\frac{1}{4}$ din aria lui T, iar dacă cele două plane fac un unghiu de 30°, atunci aria lui T'' este $\frac{3}{4}$ din aria lui T.

C. C.

Clasa a XI-a. *Exerc. 1001.* Să se verifice că

$$\left(\sqrt{\sqrt{2}+1}+i\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)^6 = 16\,(i-1) \quad \text{unde} \quad i=\sqrt{-1}.$$

E. M.

XI. 1002. Să se determine numărul natural m aşa că desvoltând

$$\left(2x^2+\frac{3}{x^4}\right)^m$$

coeficientul termenului independent de x să fie 2160.

I. I. S.

XI. 1003. Să se stabilească relaţia

$$C_{n-p}^3 = C_{n+p}^3 - (n-1)^2\, C_{p+2}^3 + 2n\,(n-2)\, C_{p+1}^3 - (n-1)^2\, C_p^3.$$

I. I. S.

XI. 1004. In desvoltarea

$$(1-x+2x^2)^5$$

să se afle coeficientul lui x^6.

N. M.

XI. 1005. Să se rezolve ecuația:

$$\begin{vmatrix} \cos 2x & 2\cos^2 x & 1+\cos^2 x \\ \cos^2 x & 1 & 1+\cos^2 x \\ \sin^2 x & \cos^2 x & \cos 2x \end{vmatrix} = 0.$$

E. M.

XI. 1006. Să se determine m așa fel ca rădăcinile sistemului

$$(m+1)x - my = 1 \quad , \quad (2m+1)x - y = m+2.$$

să fie proporționale cu 2 și 3.

I. I. S.

XI. 1007. Să se deriveze funcția

$$y = \operatorname{arc\,tg}\frac{3x+1}{x^2+x-2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{2}.$$

N. M.

XI. 1008. Să se reprezinte grafic, funcția

$$y = \frac{2x^2 - 13x + 20}{x-2}$$

N. M.

XI. 1009. Să se elimine a și b între relațiile:

$$\begin{cases} bx - (a^2 - b^2)y = 0 \\ (a^2+b^2)x + b(a^2+b^2)y = a^2 \\ a - b = ab \end{cases}$$

și să se reprezinte funcția $f(x, y) = 0$.

E. M.

XI. 1010. Să se arate că oricare ar fi x real, avem:

$$1 - \frac{x}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} - \frac{x^3}{(1+x^2)^3} + \ldots = \frac{1+x^2}{1+x+x^2}$$

C. I. Ț.

Exerciţii generale. *Exerc. 881.* Dreptele Δ, Δ' se întâlnesc în A. Fie B fix şi M mobil pe Δ. Dacă N este proiecţia lui M pe Δ' atunci raportul între MN şi suprafaţa triunghiului ANB este constant.

GH. B.

E. G. 882. Fie H ortocentrul triunghiului ABC şi O' simetricul cercului circumscris faţă de latura BC. Să se demonstreze că O'H este perpendiculară pe tangenta în A la cercul ABC.

GH. B.

E. G. 883. Fie trapezul cu laturile paralele AB şi CD; E şi F intersecţiile dreptei AD cu cercul ce trece punctele B, C, D şi paralela dusă din C la BE. Să se arate că $\overline{BC}$ este medie geometrică între $\overline{AD}$ şi $\overline{EF}$.

C. I. Ţ.

E. G. 884. Fie H ortocentrul unui tetraedru ortocentric ABCD, M un punct oarecare în spaţiu, iar A', B', C', D' punctele în care perpendicularele duse din H pe dreptele AM, BM, CM, DM se intersectează cu planele BCD, ACD, ABD, ABC.

Să se arate că punctele A', B', C', D' sunt aşezate în acelaşi plan perpendicular pe dreapta HM.

C. C.

E. G. 885. Să se arate că egalitatea:

$$xy + yz + zx = 1$$

este identic verificată, dacă se fac înlocuirile:

$$x = \frac{a^2 - 1}{2a} \quad , \quad y = \frac{b^2 - 1}{2b} \quad , \quad z = \frac{c^2 - 1}{2c} \quad ,$$

a, b, c fiind legate prin relaţia:

$$a + b + c = abc.$$

C. C.

E. G. 886. Să se rezolve sistemul

$$x + y + z = 1 \quad , \quad x^2 + y^3 = y^2 + x^3 \quad , \quad y^2 + z^3 = z^2 + y^3$$

I. I. Ş.

E. G. 887. Să se rezolve sistemul

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \quad , \quad ux+vy+wz=p \quad , \quad u'x+v'y+w'z=p'.$$

V. C.

E. G. 888. Să se rezolve sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} (x^2+y^2)\,(x^3+y^3)=247 \\ (x^2-y^2)\,(x^3-y^3)=135 \end{cases}$$

V. C.

E. G. 889. Intr'un triunghiu ABC se notează cu

$$AH_a=h_a,\ BH_b=h_b,\ CH_c=h_c$$

cele trei înălţimi şi cu H ortocentrul. Să se arate că

1^0 $\quad b^2\overline{H_aH_b}+c^2\overline{H_cH_a}=abc,$

2^0 $\quad \dfrac{a}{h_a}+\dfrac{b}{h_b}+\dfrac{c}{h_c}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\overline{AH}}{a}+\dfrac{\overline{BH}}{b}+\dfrac{\overline{CH}}{c}\right).$

I. I. S.

E. G. 890. Să se arate că avem

$$1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\ldots+\cos nx=2\operatorname{cotg}\frac{x}{2}\sin nx\sin\frac{(n+1)x}{2}$$

apoi să se verifice pentru $x=0$.

C. I. Ţ.

Aritmetică şi teoria numerelor. *Exerc. 6.* Se cer numerele *abc* şi *abd* divizibile simultan prin 7.

GH. B.

A. 7. Dacă 1_n este numărul care se obţine scriind cifra 1 de n ori, una lângă alta, atunci nici una din neegalităţile

$$1_{n-1}<2n-1\ ;\ 1_{n-1}<2n\ ;\ 1_n<2n-1;$$

$$1_n<2n\ ;\ 1_{n-2}<2n-1 \text{ şi } 1_{2n-2}<2n$$

nu poate avea loc pentru $n>4$.

GH. B.

A. 8. Să se arate că un număr de forma

$$1a9a4a7$$

nu se poate divide cu 11, unde a este o cifră.

I. I. S.

A. 9. Să se afle patratele perfecte N care conţin pe 2 şi 3 ca factori primi şi au 15 divizori.

E. M.

A. 10. Să se rezolve în numere întregi, ecuaţia

$$x^2 = y^2 + 1948\, z^2.$$

PETRE P. TEODORESCU

INSTRUCŢIUNI

a) Soluţiile exerciţiilor se vor scrie cu cerneală, pe sferturi de coală (ca foaia de caiet obişnuit) şi paralel cu lăţimea.

Soluţia unui exerciţiu poate continua şi pe contrapagină, dar dacă va fi nevoie de mai multe foi pentru soluţionarea unui exerciţiu, ele se vor coase sau lipi în partea stângă. Figurile ce vor fi necesare pentru urmărirea exerciţiilor se vor desena îngrijit.

Nu se va trimite soluţiile mai multor exerciţii pe aceeaşi foaie.

b) Redactarea soluţiilor se va face astfel:

Sus, se va scrie numele rezolvitorului în ordinea următoare: Numele de botez, iniţiala părintelui, numele de familie, urmat de clasa şi şcoala pe care o urmează.

Dedesubt se va scrie enunţul, astfel cum este publicat în revistă cu numărul exerciţiului, apoi soluţia clar compusă şi îngrijit scrisă.

c) Nu se vor lua în considerare soluţiile iscălite de doi sau mai mulţi corespondenţi sau copiate unele după altele, nici soluţiile exerciţiilor propuse la clase inferioare aceleia în care se află corespondentul.

d) Soluţiile se primesc timp de trei luni dela propunerea exerciţiului, numai dela abonaţii *« Suplimentului cu Exerciţii »* al *Gazetei Matematice*, pe adresa: Ing. C. IONESCU-ŢIU, Casa *Gazeta Matematică*, Soluţii pentru S. E. G. M., Calea Griviţei 158, Bucureşti 2. Soluţiile vor fi aşezate în ordinea crescătoare a numerelor exerciţiilor. Pe plic sau pachet se va menţiona numele, localitatea, şcoala şi clasa rezolvitorului.

Drepturile de reproducere rezervate Societăţii «Gazeta Matematică».

INSTRUCȚIUNI

Abonamentul anual la Suplimentul cu Exerciții este de 360 Lei și se poate trimite pe adresa: Casa „Gazeta Matematică", Calea Griviței 158 București, prin mandat poștal sau cont CEC Nr. 26.220.

Elevii claselor IX, X și XI, cu bogată activitate la această revistă își pot lărgi cadrul activității rezolvând și probleme din „Gazeta Matematică".

In Biblioteca Societății „Gazeta Matematică" au apărut și se găsesc următoarele:

IV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediția a III-a. Revăzută și adăugită de *Gabriela Țițeica* . . . . . Lei 270

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. Istoric, învățăminte. Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 90

XIII. **I. Ionescu,** Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica rațională . . . . . Lei 450

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a (Trigonometrie sferică). Revăzută și adăogită de G-ralul **Gh. I. Liteanu.** Lei 130

XX. **I. I. Chițulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I . . . . . Lei 160

XXI. **M. Ghermănescu,** *Trigonometria plană și sferică cu aplicații la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . . . Lei 450

XXII. **G. Țițeica,** *Culegere de Probleme de analitică.* Ediția II. Partea II adăogită de **N. G. Botea** și **C. Ionescu-Bujor** . . . . . Lei 230

XXIII. **Gazeta Matematică** 1895—1945 (Decada 5-a Istoric), învățăminte. Volum jubilar (288 pag.) . . . . . Lei 90

XXIV. **A. G. Ioachimescu,** *Mecanică rațională,* Curs predat la Școala Politehnică din București, revăzut și adăugit după îndrumările autorului, de *Gabriela Țițeica* și *Al. Stoenescu* . . . . . Lei 1.270

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărțile I — VI de Geometrie plană) tradusă din limba greacă de *V. Marian* . . . . . Lei 300

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărțile VII—IX de Aritmetică și Cartea X a Iraționalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 360

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărțile XI—XIII de Geometrie în spațiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE și Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 180

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE"
(Tipărită din fondul Anghel Saligny)

I. **Ion Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* (Ediția II-a) . . . . . Lei 90

Biblioteca Matematică „GEORGE ȚIȚEICA"

I. **Ion Ionescu,** *Maxime și minime geometrice* . . . . . Lei 230

Pentru volumele din Colecția și Biblioteca „Gazeta Matematică" de trimis în provincie se va plăti anticipat un plus de 15% din preț pentru taxele de expediție.

„Gazeta Matematică" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul începe dela 15 Septembrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentul costă . . Lei 800

M. O., IMPRIMERIA NAȚIONALA — C. 13.598

8417

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIȚII

ANUL XV. No. 3 1 DECEMBRIE 1948

9693

SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIȚEI, 158. BUCUREȘTI 2. — TELEFON 7-3803

GAZETA MATEMATICA
SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL XV. No. 3 — 1 DECEMBRIE 1948

ABONAMENTUL LEI 360 PE AN (9 numere)

Soluţii şi orice corespondenţă pe adresa: ING. C. IONESCU-ŢIU

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

EXERCIŢII REZOLVATE [1]

Clasa a III-a. *Exerc. 355. Să se împartă o sumă proporţional cu 8, 5, 7 astfel ca ultimul să primească cu 10.000 lei mai mult ca al doilea.*

N. M.

Soluţia I. Fie x, y, z părţile cerute. Avem

$$\frac{x}{8}=\frac{y}{5}=\frac{z}{7}=\frac{z-y}{7-5}=\frac{10.000}{2}=5.000.$$

De aici rezultă simplu: $x=40.000$ lei, $y=25.000$ lei, $z=35.000$ lei.

Soluţia a II-a. Să presupunem că suma de împărţit este de 1.000 lei; părţile sunt atunci date de

$$\frac{x}{8}=\frac{y}{5}=\frac{z}{7}=\frac{x+y+z}{8+5+7}=\frac{1.000}{20}=50$$

adică $x=400$, $y=250$, $z=350$. Diferenţa dintre ultimele două părţi este de 100; pentru ca ea să ajungă 10.000 trebue să amplificăm pe x, y, z cu 100.

Clasa a IV-a. *Exerc. 861. Să se arate că*

$$\frac{(a+x)(a-y)-(a-x)(a+y)}{(b+x)(b-y)-(b-x)(b+y)}=\frac{a}{b};$$

$$\frac{(x+a)(x-b)-(x-a)(x+b)}{(1+a)(1-b)-(1-a)(1+b)}=x.$$

C. I. Ţ.

Observare făcută de d-l TELEMAN A. KOSTAKE. A doua identitate se obţine din prima făcând înlocuirile: a cu x, x cu a, y cu b şi b cu 1.

1) In această rubrică publicăm numai schiţe de soluţii.

Clasa a V-a. *Exerc. 1039. Se dă: un cerc* O, *pe acest cerc un punct fix* A, *şi un unghiu constant înscris* MAN. *Să se afle locul geometric al proiecţiei punctului* M *pe cealaltă latură a unghiului.*

V. GH.

Soluţie. Perpendiculara din M pe AN taie cercul în B şi latura AN în P. Unghiul AMB este complementar cu MAN deci constant; rezultă că B este fix. Locul lui P este cercul descris pe AB ca diametru.

V. 1044. Să se determine un număr de forma mszu *ştiind că suma cifrelor este 22; cifra unităţilor este de două ori cifra zecilor; numărul format de ultimele două cifre este de trei ori mai mare decât numărul obţinut scăzând trei unităţi din numărul format de primele două cifre; numărul căutat scăzut din răsturnatul său ne dă 6543.* N. M.

Soluţie. Din enunţ scoatem sistemul de ecuaţii

$$m+s+z+u=22\ ,\quad u=2z\ ,\quad 10z+u=3(10m+s-3)$$

$$999u+90z-90s-999m=6543\quad \therefore\quad 111(u-m)+10(z-s)=727.$$

Din ecuaţiile a doua şi a treia scoatem $s=4z+3-10m$ şi înlocuim în prima; obţinem $9m=7z-19$. Avem deci

$$u=2z,\quad m=\frac{7z-19}{9}\ ,\quad s=\frac{217-34z}{9}$$

şi înlocuind în ultima ecuaţie, obţinem pe z. Numărul este 1948.

Observare făcută de d-l K. TELEMAN. Numerele m, s, z, u trebuind să fie întregi şi mai mici ca 9, din ultima ecuaţie scoatem $u-m=7$, ceea ce simplifică mult rezolvarea.

Clasa VI-a. *Exerc. 1080. Să se afle unghiul a două oarecare din diagonalele unui cub.* E. V.

Soluţie. Fie ABCDA'B'C'D' cubul de centru O şi de latură a; diagonala cubului este $a\sqrt{3}$. Să căutăm unghiul diagonalelor AC', DB', adică unghiul AOD. Avem

$$\cos AOD=\frac{\overline{AO}^2+\overline{OD}^2-\overline{AD}^2}{2\,\overline{AO}\cdot\overline{DO}}=\frac{\frac{3a^2}{4}+\frac{3a^2}{4}-a^2}{2\cdot\frac{3a^2}{4}}=\frac{1}{3}$$

$$\log\cos AOD=\bar{1},52288,\quad \sphericalangle AOD=70^{0}31'43''.$$

Clasa a VII-a. *Exerc. 1027. Fie funcţia*

$$y = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$$

să se arate că

$$4y'^2 + 2y'' \operatorname{tg} 2x = y'''.$$

E. M.

Soluţie dată de d-l VIOREL A. VISARION. Avem

$$y' = \frac{(\cos x - \sin x)^2 + (\cos x + \sin x)^2}{(\cos x - \sin x)^2} = 1 + y^2$$

$$y'' = 2yy' = 2y(1 + y^2), \quad y''' = 2y'(1 + 3y^2) = 2(1 + y^2)(1 + 3y^2)$$

şi

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{y}\right).$$

Inlocuim şi relaţia se verifică.

VII. 1031. Să se rezolve sistemul de ecuaţii

$$x + ay + a^2z + a^3u = bc + bd + cd, \quad x + by + b^2z + b^3u = cd + da + ac,$$
$$x + cy + c^2z + c^3u = da + db + ab, \quad x + dy + d^2z + d^3u = ab + ac + bc.$$

V. C.

Soluţie[1] Determinantul sistemului este un determinant VANDERMONDE

$$V = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \end{vmatrix}.$$

Determinanţii numărători sunt

$$V_1 = \begin{vmatrix} bc + bd + cd & a & a^2 & a^3 \end{vmatrix} = V(m \Sigma a^2 + n \Sigma ab)$$
$$V_2 = \begin{vmatrix} 1 & bc + bd + cd & a^2 & a^3 \end{vmatrix} = V \cdot p \Sigma a$$
$$V_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & bc + bd + cd & a^3 \end{vmatrix} = V \cdot q$$
$$V_4 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & bc + bd + cd \end{vmatrix}.$$

In V_1 identificăm coeficienţii în a^5b^2c şi $b^2c^2d^4$ şi obţinem $m = 0$, $n = 1$. In V_2 din termenii în ac^2d^4 obţinem $p = -1$. In V_3 din termenii a^2cd^3 obţinem $q = 1$. Iar V_4 polinom de gradul 5 în a, b, c, d se anulează pentru $a = b$, $a = c$, etc. deci se divide cu $\Pi(a - b)$ de gradul 6. Deci $V_4 = 0$. Rezultă

$$x = \frac{V_1}{V} = \Sigma ab, \quad y = \frac{V_2}{V} = -\Sigma a, \quad z = \frac{V_3}{V} = 1, \quad u = \frac{V_4}{V} = 0.$$

---

1) Redactată după soluţia d-lui GH. PĂUNESCU.

Observare. Considerăm ecuaţia în t.

$$x + ty + t^2z + t^3u = \Sigma ab - \Sigma a \cdot t - t^2. \qquad (1)$$

Din sistemul propus rezultă că ecuaţia (1) de gradul trei are patru rădăcini: pe a, b, c, d. Deci ea se reduce la o identitate; identificând coeficienţii aceloraşi puteri ale lui t, regăsim soluţiile date.

VII. 1049. Fie $f(x, y) = \dfrac{y + y}{x^5 + y^5}$. *Să se arate că*

$$\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x} fx^2 + \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y} fy^2 = 0.$$

N. M.

Soluţie. Partea întâia a relaţiei de demonstrat se poate scrie sub forma

$$\frac{1}{x}\left(2xf + x^2\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{1}{y}\left(2yf + y^2\frac{\partial f}{\partial y}\right) = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + 4f$$

deci nulă, în baza relaţiei lui EULER, $f(x, y)$ fiind omogenă de gradul -4.

Clasa a VIII-a. *Exerc. 960. Fie o bară* AB *de lungime 4 dm, de greutate 2 kg. De fiecare capăt* A *şi* B *este prins câte un fir* AC *şi* BD *fără greutate proprie, de lungime 6 dm. Se prind capetele* C *şi* D *de tavan astfel încât:*

1) AC *şi* BD *să fie verticale.*

2) Firele fiind prinse de tavan în această poziţie se întoarce bara astfel încât firele să formeze un X.

3) Se apropie punctele C *şi* D *de pe tavan, în cazul 1) şi 2) până coincid.*

Să se determine în toate aceste cazuri, cât este tensiunea în firele AC *şi* BD.

G. Ţ.

Soluţie. 1. Sarcina se distribue egal şi tensiunile sunt egale, de câte 1 kg.

2. Fie 2α unghiul firelor; avem

$$\sin\alpha = \frac{2}{3}, \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Notăm cu P greutatea în kg şi cu T tensiunile (egale între ele, din cauza simetriei). Forţele concurente P, T şi T fiind în echilibru aplicăm teorema sinusurilor

$$\frac{T}{\sin\alpha} = \frac{P}{\sin 2\alpha}\ , \quad T = \frac{P}{2\cos\alpha} = \frac{3\sqrt{5}}{5} = 1{,}342 \text{ în kg.}$$

3. Şi aici forţele sunt concurente; notând unghiul ACB cu 2α, avem $\sin\alpha = 1:3$, deci

$$T = \frac{P}{2\cos\alpha} = \frac{3\sqrt{2}}{4} = 1{,}06 \text{ în kg.}$$

Exerciţii generale. *Exerc. 848. Să se verifice identitatea*

$$(C_n^0 - C_n^2 x + C_n^4 x^2 - \ldots)^2 + x(C_n^1 - C_n^3 x + C_n^5 x^2 - \ldots)^2 = (1+x)^n.$$

N. M.

Soluţie [1] Plecăm dela

$$(C_n^0 + C_n^1 y + C_n^2 y^2 + C_n^3 y^3 + \ldots)(C_n^0 - C_n^1 y + C_n^2 y^2 - C_n^3 y^3 + \ldots)$$
$$= (1+y)^n (1-y)^n = (1-y^2)^n;$$

sau, scriind partea întâia ca o diferenţă de patrate

$$(C_n^0 + C_n^2 y^2 + C_n^4 y^4 + \ldots)^2 - y^2(C_n^1 + C_n^3 y^2 + C_n^5 y^4 + \ldots)^2 = (1-y^2)^n.$$

Pentru $x = -y^2$ se obţine relaţia din enunţ.

Soluţia a doua. Avem

$$(1+iy)^n = (C_n^0 - C_n^2 y^2 + C_n^4 y_n^4 + \ldots) + iy(C_n^1 - C_n^3 y^2 + C_n^5 y^4 + \ldots)$$

egalăm modulele celor două părţi; apoi facem $x = y^2$.

E. G. 856. Să se verifice relaţiile

$$\Sigma \sin^2 A \cos A \sin(B-C) = -\Sigma \sin^2 A \cos B \cos C \sin(B-C)$$
$$= \sin(A-B)\sin(B-C)\sin(C-A).$$

V. C.

Soluţie dată de d-l P. P. TEODORESCU. Pornim dela identitatea

$$\Sigma\, a(b^2-c^2) = -\Sigma\, a^2(b-c) = (a-b)(b-c)(c-a)$$

şi punem $a = \operatorname{tg}\alpha$, $b = \operatorname{tg}\beta$, $c = \operatorname{tg}\gamma$.

---

[1] Redactată după soluţia d-lui P. TEODORESCU.

Până la 5 Noembrie 1948, am primit soluții bune la exercițiile propuse în numerele 1, 2, vol. XV, dela[1]:

Liceul teoretic de fete, Arad

Clasa a X-a : Cotnaciu I. Stela (X : 1075).

Liceul mixt, Beiuș-Bihor.

Clasa a X-a : Fântânaru N. Nicolae (X : 1101, 2, 3).

Liceul „Orfelinat", Bistrița-Vâlcea.

Clasa a VII-a : Gogâță D. Ion (VII : 364, 6*).

Liceul teoretic de băieți, Brăila.

Clasa a XI-a : Bobi O. Constantin (XI : 991, 3, 4, 5*, 6*, 7, 8, 9*, 1000, 1*, 6, 7, 8*, 10, E. G. : 871*, 2, 85, A : 1, 4, 5, 8) ; Rădulescu A. Traian (XI : 992, 1006, 7, 10, E. G. : 871*).

Liceul teoretic de băieți, Brașov

Clasa a X-a : Sulică Al. Alexe (X : 1061, 2, 3, 4*, 5*, 6, 7*, 8, 9*, 70*, XI : 991, 2*, 3, 4, 5, 6*, E. G. : 871*, 2, 3*, 4*, 5*, 6*, 7*, A : 5),

Liceul teoretic de fete Nr. 8, București.

Clasa a XI-a : Arvunescu Constanța (XI : 997, 9, 1000) ; Petrescu Gh. Lucreția (XI : 997, 9, 1000, 8*).

Liceul teoretic Nr. 12, București.

Clasa a VIII-a : Pomponiu I. Anca (VIII : 1084*, E. G. : 871, 2).

Școala elementară de fete, Băneasa-București

Clasa a VI-a : Andrei S. Maria (VI : 2, 3) ; Chiriţoiu I. Maria (VI 3) ; Crăciun I. Maria (VI : 2, 3) ; Olaru V. Gabriela (VI : 2, 3) ; Radu M. Elena (VI : 2, 3) ; Varzaru N. Vasilica (VI : 3) ; Vencu T. Elena (VI : 3) ; Vinterlic I. Ana (VI : 2, 3).

Clasa a VII-a : Catrina I. Elena (VII : 364) ; Coantă E. Elena (VII : 364) ; Dobrică M. Melania (VII : 364) ; Dumitrescu Gh. Virginia (VII : 364, 5*, 6*) ; Rogozeanu T. Elena (VII : 364) ; Weiser H. Margot (VII : 364).

Liceul teoretic de băieți Nr. 1, București.

Clasa a VIII-a : Velicu I. Gabriel (VIII : 1081, 3*, 91, 2).

Clasa a X-a : Ianculescu R. Gh. (X : 1062, 3, 70*, E. G. : 871).

---

1) Semnul * însoțește numărul unui exercițiu foarte bine rezolvat și foarte îngrijit redactat.

Liceul teoretic Nr. 2, Bucureşti

Clasa a VIII-a: Dudcovschi I. Petre (VIII: 1091, 2*, 3*); Frăsin C. Mihai (VIII: 1081, 5); Lumânare V. Florea (VIII: 1083*, 5, 6*, 7, 8, 90*, 1, 2*, 3*, 4, 5*, 6, 7, 8, 1100*, 1*, 7*, 12*, 3); Petre St. N, (VIII: 1085, 7, 8, 96, 7, 112, 4); Roitman N. Ily (VIII: 1082, 3*, 4*, 5, 7, 8, 9*, 90*, 1, 2*, 3*, 5, 6, 7, 8, 9*, 100*, IX: 1112, 14); Zaidman D. Sami (VIII: 1082, 4, 6*, 7, 91, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 100, IX: 1112, 3, 4, 9, X: 1071, E. G.: 871).

Clasa a XI-a: Horodniceanu S. Mirel (XI: 991*, 2*, 4, 5*, 7*, 8, 9*, 1000*, 8*); Lenz N. Friedrich (XI: 1001*, 4, 6, 8*, 10, E. G.: 872); Marineanu I. Nicolae (XI: 992*, 3*, 4, 5*, 7*, 8, 9, 1000); Moraru E. Valeriu (XI: 994, 5, 7, 8, 9*, 1000, E. G.: 872, A: 4); Păunescu Şt. Gh. (XI: 1001*, 4*, 7*, 8*. 10, E. G.: 873*, 4*, 81*, 2*, 5*).

Liceul teoretic Nr. 3, Bucureşti.

Clasa a VIII-a: Popovici E. Mirel (VIII: 1083*, 8, 91, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9*, 100*).

Clasa a X-a: Ioniţă C. Gh. (X: 1061, 2, 3, 6, 9, XI: 991*, 2*, 4).

Liceul teoretic Nr. 7, Bucureşti.

Clasa a VI-a: Ianovici Mircea (VI: 1*, 2*, 3*, VII: 364); Ionescu C. Mihai (VI: 2*, 3*); Schwartz Miron (VI: 3).

Clasa a VII-a: Popovici P. Mihail (VII: 364, 5*, 6*, VIII: 1085).

Clasa a VIII-a: Apolzan Gh. Silviu (VIII: 1091, 2); Băcioiu Adrian (VIII: 1085, 7, 96, 7); Begheanu Constantin (VIII: 1091); Călinescu R. Matei (VIII: 1083, 91, 2); Cassian C. Dan (VIII: 1085, 7, 8, 96, 7); Ciocan N. Mihai (VIII: 1087); Codreanu Radu (VIII: 1085, 7, 91, 6, 7); Constantin V. Gheorghe (VIII: 1096); Constantinescu I. Ovidiu (VIII: 1081, 3, 92); Cristescu F. Mircea (VIII: 1085, 7, 96, 7); Cristodulo C-tin (VIII: 1081, 7, 91, 2, 6, 7); Dragomirescu V. Virgil (VIII: 1081, 91); Dumitrescu Vlad (VIII: 1087, 96, 7); Gâlceavă Zamfir (VIII: 1097); Georgescu Şt. Dinu (VIII: 1096, 7); Georgescu Ştefan (VIII: 1085); Hagiu I. Ştefan (VIII: 1083, 91); Iliescu N. Mihail (VIII: 1091); Ionescu M. Gheorghe (VIII: 1083); Iordache I. Gh. (VIII: 1091); Kiselevski I, I. (VIII: 1083, 91, 2); Lazarovici Cristian (VIII: 1087, 91, 2, 6, 7); Machiev Mihai (VIII: 1091); Marinescu S. Cristian (VIII: 1085, 7, 96, 7); Melinte T. Const. (VIII: 1081, 91, 2); Mircea E. Andrei (VIII: 1081, 3, 91); Monaru Corneliu (VIII: 1091); Nastasia St. I. (VIII: 1085, 92, 7); Nicolaescu A. Dinu (VIII: 1083*, 91, 2); Oancea Gabriel (VIII: 1081, 92, 6, 7); Oancea T. Traian (VIII: 1092); Petre M. Ilie (VIII: 1091); Popescu Paul (VIII: 1085, 96, 7); Popovici L. Gheorghe (VIII: 1081, 3, 91, 2); Radu D. Constantin (VIII: 1097); Rudeanu M. Sergiu (VIII: 1091*); Şerbănescu Dinu (VIII: 1085, 7, 91, 2, 6, 7); Vaida Dragoş (VIII: 1081*, 5, 91, 2, 6); Voinea Alex. (VIII: 1096); Vlădescu Horaţiu (VIII: 1091); Weinstein Iulius (VIII: 1083, 91, 2).

Clasa a X-a: Deleanu I. Aristide (X: 1061, 3, 6, 7*, 8, E. G.: 871*, 3*); Hangan M. Teodor (X: 1061, 2, 3, 5, 6, 8, 9*, XI: 991*, 3*, 6*, 7*, 8,

E. G.: 871*, 6*, 9*); ZĂNESCU A. LIVIU (X: 1062, 3, 4, 6, 7*, 8, E. G.: 871*, 2, 3*, 4*, 7*).

Clasa a XI-a: BOTOŞĂNEANU DAN (XI: 1007); CHIRILĂ GH. CONSTANTIN (XI: 1000, 7, 8); DORDEA RADU (XI: 995, 1000, 7, 8); EREMIE H. ION (XI: 991*, 2, 5, 7, 1000, 1, 2, 7, 8*); GEORGESCU PAUL (XI: 1000, 8*); GIURCĂNEANU GRIGORE (XI: 997*, 8, 9, 1000, 7, 8*); ILIE ALEXANDRU (XI: 998); LĂZEANU I. IOAN (XI: 998, 1000, 7, 8*); MĂNEASA VALENTIN (XI: 1000, 7); MĂRGESCU-NEMEREALĂ D, PAUL (XI: 997, 8, 1000, 7, 8*); MIHĂILESCU MARCEL (XI: 997); OANCEA C. NICOLAE (XI: 997, 1001*, 7); OVRICENCO M. ION (XI: 1007); POMPONIU GH. GHEORGHE (XI: 991*, 2*, 4, 5, 7, 1000); PRIE IOAN (XI: 995, 1007); ŞERBĂNESCU MIHAIL (XI: 997*, 8, 1000); STAMATESCU C. CORNEL (XI: 997, 8, 1000, 1, 2, 8*); STĂNESCU LIVIU (XI: 998); STĂNESCU MARIAN (XI: 997, 8, 1000, 1, 2, 7, 8*); TZUCATOS M. CONSTANTIN (XI: 1000, 8*); ZALARU GEORGE (XI: 1007).

Liceul teoretic Nr. 8, Bucureşti.

Clasa a XI-a: CORCIOVEI I. ARETIN (XI: 991*, 2*, 3, 4, 5*, 6*, 7*, 8, 9, 1000, E. G.: 871*, 2, 4*, 5*, 6*, 7*, 8*, 9*, 80*; A: 1, 2*, 3*, 4, 5).

Liceul teoretic Nr. 9, Bucureşti

Clasa a XI-a: STĂNESCU D. CRISTIAN (XI: 991*, 2*, 4, 5*, 6*, 7, 8, 9, 1001, 7, 8*, 10, E. G.: 873*, 4*, 8*, 9*, 85*).

Liceul teoretic Nr. 10, Bucureşti.

Clasa a XI-a: MUŞAT ŞT. IOAN (XI: 991*, 2*, 3*, 4, 5*, 7*, 8, 9*, 1000, A: 1, 5); NICOLAU D. CRISTIAN (XI: 991*, 2*, 5*, 6*, 7, 1000, 10, E. G.: 871*, 2, 3*, 7*, A: 4, 5).

Liceul teoretic Nr. 13, Bucureşti.

Clasa a X-a: GHEORGHE Z. DUMITRU (X: 1062, 3, 6, 7*, 8).

Şcoala elementară Nr. 57, Bucureşti

Clasa a VI-a: BADEA I. GHEORGHE (VI: 5); BALIU P. IAMANDI (VI: 5, 6); BAN ROMULUS (VI: 5); BĂRBULESCU CONST. (VI: 5); BĂICUŞI GH. SEMPRONIU (VI: 5); CENUŞE M. ALEXANDRU (VI: 5); CRISTEA NICOLAE (VI: 5); CHIVULESCU IOAN (VI: 2, 5, 6); CIORAŢĂ V. CONST. (VI: 5); CREŢU NICOLAE (VI: 5); DIMA DRAGOŞ (VI: 5); MANOLESCU HARALAMBIE (VI: 3, 5); MIREA IOAN (VI: 5); MOLDOVEANU NICULAE (VI: 5); NEDELCU ALEXANDRU (VI: 5); NEDELCU IOSIF (VI: 5); OLTEANU AUREL (VI: 6); OLTEANU M. NICOLAE (VI: 5, 6); PASCALE TUDOR (VI: 3, 5); PÂRŢAN ION (VI: 3, 5); PLEŞA MIHAI (VI: 5); STĂNCESCU I. GHEORGHE (VI: 5, 6); STOICA V. (VI: 5); SUHAI NICOLAE (VI: 5).

Clasa a VII-a: IONESCU I. ION (VII: 364); SPERIATU NICOLAE (VII: 364); STANCU ION (VII: 364).

Liceul de băieţi, Buzău

Clasa a XI-a: ŢOPA I. N. (XI: 991*, 2*, 3*, 4, 5, 6*, 7, 1000, E. G.: 871*, 2, 4*, 6*, 7*, 8, 9*, 80*, A: 4, 5).

Liceul „Dinicu Golescu", Câmpulung-Muscel.

Clasa a IX-a: Vișoiu A. Gheorghe (IX: 1102, 3, 4, 5, A: 4).

Colegiul popular „N. Bălcescu", Craiova.

Clasa a X-a: Vărzaru I. Emanoil (X: 1060, 1, 2, 3, 4, 5*, 6*, 7, 8, 9, 70*, XI: 991, 2, 3, 4*, 5, 6, 7, 8, 9, A: 2, 4, 5, E. G.: 872, 6, 7, 8, 9*, 80).

Liceul Nr. 1, din Giurgiu.

Clasa a XI-a: Moraru F. Dinu (XI: 999, E. G.: 877).

Liceul din Oradea-Mare

Clasa a XI-a: Popa F. Pavel (XI: 992, 5, 6, 7, 8, 1000, E. G.: 873, A: 2, 4, 5), Vidican G. I. (XI: 1004, A: 2, 5).

Liceul de fete din Ploiești.

Clasa a X-a: Călușiță I. Mioara (X: 1064*, 70*, 1, 2, 7, XI: 992*, E. G.: 871*, 2, 6, 7, A. 4).

Liceul de băieți din Ploiești.

Clasa a XI-a: Bunescu S. Constantin (XI: 992, 4, 5*, 7, 8, 9, E. G.: 871, A: 4, 5).

Liceul mixt din Râmnicul-Sărat.

Clasa a VIII-a: Dobrilă Gheorghe (VIII: 1081, 3, 91, 2, 3, 4), Făclieru C. Aron (VIII: 1081, 5), Ionescu V. Mircea (VIII: 1091, 2, 4, 6, 8), Eduard C. Apostol (VIII: 1081, 3*, 5, 6*, 7, 91, 2*, 3*, 4*, 5, 6, 7, 8, 1100), Mănuică C. Gheorghe (VIII: 1081, 3, 91, 2, 3, 4), Petrică M. Dineață (VIII: 1081, 3, 92*, 3*), Schächter M. Aron (VIII: 1081, 5*, 7), Slobozeanu P. Gheorghe (VIII: 1081, 91*, 2, 4).

Clasa IX-a: Cuceaschevici S. Valentina (IX: 1102*, 3, 4*, 7*, 12, 3), Drăgan Fănică (IX: 1002, 3, 4, 7, 12, 3), Drăgulescu C. Mitică (IX: 1102*, 3, 4, 7*, 9, 11*, 2, 3, 7), Hogea Grigore (IX: 1101*, 03, 4*, 5*. 6*, 10, X: 1069, 70*, E. G.: 871, 2, 7, A. 4, 5), Ionescu N. Mircea (IX: 1081, 2, 102, 3, 4* 7, 12, 3, 4, 7), Isofache N. Aristide (IX: 1102*, 3, 4, 7, 12, 3, 4, 7, A: 1), Lăptoiu G. Ionel (IX: 1112, 3, 14, 7*, A: 1, 4, 5, 8), Munteanu Dumitru (IX: 1102, 3, 12, 3), Sare Constantin (IX: 1102*, 3, 5, 7, 12, 3, 5), Stog D. Ilie (IX: 1102, 3, 12, 3, A: 9*), Turlacu N. Elena (IX: 1002*, 7*, 11, 2, 3), Zaharia St. Valeriu (IX: 1102*, 3, 4, 7).

Clasa a XI-a: Velea M. Eugen (XI: 991, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1000, 7, A: 1, 5).

Liceul de băieți din Râmnicul-Vâlcea.

Clasa a X-a: Mârzan D. Emil (X: 1062, 3*, A, 4, 5).

Liceul „Radu Greceanu", Slatina-Olt.

Clasa a X-a: Ion C. Stroe (X: 1063*, 8, 74*, XI, 989, 90, A: 4).
Clasa a XI-a: Cârstea I. Dumitru (XI: 991, 4, 5*, 6, 9).

Liceul de fete din Târgul-Jiu

Clasa a X-a: Pârvănescu V. Eugenia (X: 1063, 5, 6, 7*, 8, A, 1*, 2, 4, 5).

Liceul de băieți din Târgul-Jiu

Clasa a VI-a: Filipescu St. Alin (VI: 1, 2, 3, VII: 364, 5*, 6), Fumărel V. Victor (VI: 1, 2, 3, VII: 364, 5, 6), Popescu Dorin (VI: 1, 2, 3, VII: 364, 5, 6), Ungureanu I. Ion (VI: 1, 2, 3, VII: 364, 5, 6).

Clasa a IX-a: Oproiu I. Adrian (IX: 1101*, 2*, 3, 4, 5*, 6, 7*, 8, 9*, 10).

Liceul de fete din Timișoara

Clasa a IX-a: Gârleșteanu M. Eliza (IX: 1101*, 2*, 3, 4*, 5*, 6*, 7*, 8, 10, E. G.: 871*, 2, 3, 4, A: 1, 4, 5),

Clasa a XI-a: Rebegilă D. Miriana (XI: 991, 6, A: 4, 5)

EXERCIȚII PROPUSE

Soluțiile exercițiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 Martie 1949

Clasa a VI-a. *Exerc. 7.* Prin construcția nouei linii ferate Filiași-Bumbești-Livezeni s'a realizat o economie în material rulant, de 37.000 vagoane anual. Dacă în mijlocie se întrebuințează o locomotivă la 13 vagoane și dacă o locomotivă consumă cărbuni de circa 300 lei pe zi, ce economie anuală s'a realizat numai în cărbuni, prin această importantă lucrare tehnică?

N. M.

VI. 8. Să se arate că

$$(60^2 - 11)^2 - (11^2 - 60)^2 = 60^2\,(60^2 - 2\times 11 - 1).$$

N. M.

VI. 9. Un corp în formă de con are raza bazei de 3 cm și înălțimea de 8 cm. Care este densitatea substanței din care este alcătuit, dacă este cu 14 g mai ușor decât un corp cilindric, de aramă, cu raza de 2 cm și înălțimea de 5 cm?

N. M.

Clasa a VII-a. *Exerc. 370.* Să se arate că

$$(24 + \sqrt{557})\times(24 - \sqrt{557}) = 2 + (\sqrt{458} + 21)\times(\sqrt{458} - 21).$$

N. M.

VII. 371. Un lucrător mi-ar pava curtea singur, în 6 zile. Mai chem un lucrător şi termin lucrul în $3\frac{3}{7}$ zile. In câte zile mi-ar fi lucrat singur, al doilea lucrător?

N. M.

VII. 372. Un antreprenor plăteşte celor patru lucrători, pentru lucrul efectuat, 24.000 lei. Primului lucrător îi dă 5/7 din suma dată celui de al doilea; celui de al treilea 5/6 din cât a dat primului şi celui de al doilea; iar ultimului 1/5 din cât a dat celui de al treilea. Să se afle cât a dat fiecăruia.

E. M.

Clasa a VIII-a. *Exerc. 1101.* Să se verifice identitatea

$$[(a+2y)^2+a(a+2x)]^2+16y(a+y)(x-y)(a+x+y)$$
$$=4(a+x)^2(a+2y)^2.$$

Caz particular: $x=0$.

N. M.

VIII. 1102. Să se verifice egalităţile

$$(x+y)^3+3z(x+y)(x+y+z)+z^3$$
$$=(x+z)^3+3y(x+z)(x+y+z)+y^3$$
$$=(y+z)^3+3x(y+z)(x+y+z)+x^3.$$

H. D.

VIII. 1103. Fie:

$$E_1=x^4-4x^3(x-y)+6x^2(x-y)^2-4x(x-y)^3+(x-y)^4$$
$$E_2=x^4-4x(x+y)^3+6x^2(x+y)^2-4x^3(x+y)+(x+y)^4.$$

Să se arate că:

$$E_1=E_2=y^4.$$

E. M.

VIII. 1104. Să se arate că avem identitatea

$$\Sigma(b-c)(a+c-b)(a+b-c)=-4(a-b)(b-c)(c-a).$$

V. C.

VIII. 1105. Să se arate că avem identitatea

$$\Sigma\, a(b^2-c^2)(b^2+c^2+ab+ac)=(a+b+c)^2(a-b)(b-c)(c-a).$$

V. C.

VIII. 1106. Să se arate că avem identitatea

$$\Sigma\, x^2(y-z)(x+y)(x+z)=-(x+y+z)^2(x-y)(y-z)(z-x).$$

V. C.

VIII. 1107. Să se arate că

$$\frac{(1+zx)(y-z)+(1+yz)(z-x)}{(y-z)(z-x)-(1+zx)(1+yz)}=\frac{x-y}{1+xy}.$$

C. I. T.

VIII. 1108. Să se arate că

$$\frac{(1+x^2)(1+y^2)-(1+xy)^2+a(x-y)^2}{(1+x^2)(1+y^2)+a(1+xy)^2-(x-y)^2}$$

$$=\frac{(x-y)^2}{(1+xy)^2}=\frac{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^2}{\left(1+\frac{1}{xy}\right)^2}.$$

C. I. T.

VIII. 1109. Dacă $abc+1=0$, avem

$$(a\pm b)(1\pm c)+\left(\frac{1}{a}\pm\frac{1}{b}\right)\left(1\pm\frac{1}{c}\right)=0.$$

Semnele se corespund.

C. I. T.

VIII. 1110. Să se arate că:

$$1\pm a\sqrt{1-b^2}=\sqrt{(a\pm\sqrt{1-b^2})^2+b^2(1-a^2)}$$

$$\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\mp ab=\sqrt{1-(a\sqrt{1-b^2}\pm b\sqrt{1-a^2})^2}.$$

C. I. T.

Clasa a IX-a. *Exerc. 1121.* Să se arate că ecuaţia $x^2 + px + q = 0$, având rădăcinile reale, avem $1 + p^2 + 9q^2 \geqslant 10q$.

C. I. Ţ.

IX. 1122. Să se discute ecuaţiile:

$$x^2 - (m-3)x + (m+3) = 0 \quad , \quad x^2 + (m+3)x - (m-3) = 0$$

după valorile parametrul m (când parametrul m variază dela $-\infty$ la $+\infty$).

E. V.

IX. 1123. Dându-se ecuaţia de gradul al doilea în x:

$$(m^2+1)x^2 + 2(m^2 - 5m + 6)x + (m^2 - 10m + 12) = 0,$$

se cere:

1°. Să se studieze natura şi semnul rădăcinilor acestei ecuaţii, când m variază dela $-\infty$ la $+\infty$.

2°. Să se rezolve efectiv această ecuaţie în fiecare din cazurile particulare pentru cari rădăcinile ei sunt reale şi confundate.

E. V.

XI. 1124. Să se descompună în factori de gradul al doilea polinoamele:

$$x^4 \pm x^2 y^2 + y^4.$$

E. V.

IX. 1125. Să se determine m aşa încât polinomul simetric omogen de gradul al şaselea:

$$P(x, y) = x^6 - 4x^4 y^2 + mx^3 y^3 - 4x^2 y^4 + y^6$$

să se poată descompune în factori de gradul al treilea de aceeaşi natură.

Să se afle apoi aceşti factori şi să se deducă în urmă o descompunere simplă a polinomului dat în factori de gradul al doilea.

E. V.

IX. 1126. Să se arate că ecuaţiile:

$$x^2 - (a+b)x + a^2 + b^2 = 0 \quad , \quad x^2 - (a+b+c)x + a^2 + b^2 + c^2 = 0$$

au totdeauna rădăcinile imaginare, oricari ar fi numerele reale a, b, c.

C. C.

IX. 1127. 1°. Să se discute ecuaţia

$$(m+1)x^2+(m+2)x-2m=0$$

după diversele valori ale parametrului m.

2°. Să se determine m, astfel ca ecuaţia precedentă să admită o rădăcină $x_1=3$ şi apoi să se rezolve.

N. M.

IX. 1128. Se dă ecuaţia de gr. II

$$3mx^2-(4m+2)x+m+3=0$$

unde m este un parametru variabil şi se cere:

a) Să se discute această ecuaţie.

b) Să se afle m şi să se rezolve ecuaţia ştiind că $3x'+5x''=6$.

V. C.

IX. 1129. Se dă ecuaţia de gr. II.

$$6(p-1)x^2-(5p-3)x+p-3=0$$

unde p este un parametru variabil şi se cere:

a) Să se discute această ecuaţie.

b) Să se determine p şi să se rezolve ecuaţia ştiind că $6x'-7x''=-4$.

V. C.

IX. 1130. Se dă $\sin\alpha=\frac{5}{13}$, $\sin\beta=\frac{24}{25}$.

Să se calculeze $\sin(\alpha+\beta)$ şi $\operatorname{tg}(\alpha+2\beta)$.

V. C.

Clasa a X-a. *Exerc. 1081.* Să se arate că

$$\cos^2(a-b)-\cos^2(a+b)=\sin 2a\,\sin 2b$$

$$\cos^2 a+\cos^2 b=1+\cos(a+b)\cos(a-b).$$

C. I. Ţ.

X. 1082. Să se arate că

$$\frac{1}{\cos a\cos b}\pm\operatorname{tg}a\,\operatorname{tg}b=\sqrt{\left(\frac{\operatorname{tg}a}{\cos b}\pm\frac{\operatorname{tg}b}{\cos a}\right)^2+1}.$$

C. I. Ţ.

X. 1083. Să se simplifice fracția

$$\frac{\sin 3\alpha + 2\sin 4\alpha + \sin 5\alpha}{\cos 3\alpha + 2\cos 4\alpha + \cos 5\alpha}.$$

V. C.

X. 1084. Să se simplifice fracția

$$\frac{\sin \alpha + \sin 5\alpha + \sin 9\alpha + \sin 13\alpha}{\cos \alpha + \cos 5\alpha + \cos 9\alpha + \cos 13\alpha}.$$

V. C.

X. 1085. Dacă într'un triunghiu

$$\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} = \frac{\cos C}{c}$$

atunci $a^2 + b^2 = 3c^2$.

I. I. S.

X. 1086. Să se rezolve sistemul:

$$\sin x + \sin y = \frac{5}{6} \quad ; \quad \cos x + \cos y = \frac{2}{9}.$$

E. M.

X. 1087. Să se arate că

$$C_3^3 + C_4^3 + C_5^3 + C_6^3 + C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + C_5^2 + C_6^2 = C_8^4.$$

N. M.

X. 1088. Să se verifice că

$$C_n^p + C_n^{p+1} + C_{n+2}^{p+1} + C_{n+1}^{p+2} = C_{n+3}^{p+2}.$$

N. M.

X. 1089. Să se arate că

$$a^5 \pm \frac{1}{a^5} = \left(a \pm \frac{1}{a}\right)^5 \mp 5\left(a \pm \frac{1}{a}\right)^3 + 5\left(a \pm \frac{1}{a}\right).$$

C. I. Ț.

X. 1090. Dacă

$$S = 1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p$$

să se arate că

$$16\,\Sigma S_3 - 12\,\Sigma S_2 + 4\,\Sigma S_1 = S_4 + S_3 .$$

N. M.

Clasa a XI-a. *Exerc. 1011.* Să se calculeze determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} yz & zx & xy \\ x(y+z) & y(z+x) & z(x+y) \\ (y+z)^2 & (z+x)^2 & (x+y)^2 \end{vmatrix} .$$

V. C.

XI. 1012. Să se calculeze determinantul

$$\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \operatorname{tg}\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \operatorname{tg}\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \operatorname{tg}\gamma \end{vmatrix} ,$$

punând:

A) $\operatorname{tg}\alpha = x \quad , \quad \operatorname{tg}\beta = y \quad , \quad \operatorname{tg}\gamma = z.$

B) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = u \quad , \quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = v \quad , \quad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = w.$

V. C.

XI. 1013. Să se afle limita expresiei

$$y = \frac{\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}a}{\sin x - \sin a}$$

când $x \to a$:

1°. Direct transformând expresia dată.

2°. Punând $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = u \quad , \quad \operatorname{tg}\frac{a}{2} = A$ și transformând expresia dată într'o expresie algebrică.

V. C.

XI. 1014. Să se reprezinte grafic funcțiunea

$$y = \frac{x^5}{x^4 - 13x^2 + 36}.$$

V. C.

XI. 1015. Se dă funcțiunea

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 4} \qquad (1)$$

și se cere:

A) Să i se studieze variația și să se reprezinte grafic.

B) Să se scrie ecuația tangentei la curba (1) în punctul $x = -1$.

C) Să se arate că avem

$$(x^2 - 4)\, y'' + 4xy' + 2y = 6x.$$

D) Să se afle intersecțiile curbei (1) cu dreapta $y = -\frac{27}{5}$.

E) Să se afle limita expresiei $\left(\frac{y}{x}\right)^{x^2}$, când $x \to \infty$.

V. C.

XI. 1016. Să se arate că

$$4\int_2^{\infty} \frac{t\,dt}{t^4 - 1} = \log\frac{3}{5}.$$

N. M.

XI. 1017. Fie

$$f(x) = \int_0^x \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}.$$

Să se arate că

$$3f(3) = 4f(1)$$

N. M.

XI. 1018. Să se arate că

$$\int_{ma}^{na} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + ax}}$$

nu depinde de a.

N. M.

XI. 1019. Să se arate că

$$\int_0^{\infty} (x^3 - 6)\, e^{-x}\, dx = 0.$$

N. M.

XI. 1020. Să se reprezinte grafic, funcția

$$y = \int_{-\infty}^{x} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\, dx.$$

N. M.

Exerciții generale. *Exerc. 891.* Fie O centrul cercului circumscris triunghiului isoscel ABC cu laturile AB și AC egale. Să se arate în ce caz perpendiculara în A pe AC este simetrica lui OA față de AB.

GH. B.

E. G. 892. Fie M un punct pe latura BC a triunghiului ABC, între B și C. Se ia pe latura BA, dela B spre A, un punct N și pe latura AC, dela A spre C, un punct P așa încât

$$BM = BN \quad \text{și} \quad CM = CP.$$

In ce caz punctele M, N, P sunt colineare?

GH. B.

E. G. 893. Se dau două cercuri exterioare, și se duc tangentele lor comune. Se duc apoi cercurile cari au ca diametre segmentele din aceste tangente, limitate la punctele de contact respective.

Să se demonstreze că aceste patru cercuri au două puncte comune, imaginare (Cercurile au același ax radical).

C. C.

E. G. 894. Fie H ortocentrul triunghiului ABC, iar M, N, P centrele cercurilor HBC, HCA, HAB respectiv. Dreptele HM, HN, HP se intersectează cu laturile BC, CA, AB respectiv în D, E, F.

Să se arate că dreptele AD, BE, CF sunt concurente într'un punct Q și să se precizeze poziția punctului Q.

C. C.

E. G. 895. In triunghiul dreptunghic ABC cu unghiul drept A ducem medianele BB_1 și CC_1. Perpendiculara dusă din B_1 pe BB_1 taie pe AB în D iar perpendiculara dusă din C_1 pe CC_1 taie pe AC în E. Luăm pe AB și AC respectiv înspre B și C, segmentele $\overline{AF} = \overline{AC}$ și $\overline{AG} = \overline{AB}$. Notăm cu S' suprafața patrulaterului DEFG și cu S suprafața triunghiului ABC.

Să se arate că

$$16S' - 17\,S = 2\overline{BC}^2.$$

GH. ȘT. PĂUNESCU

E. G. 896. Să se rezolve sistemul

$$x+y+z=6\ ,\quad x(y+z)=y(z+x)=z(x+y).$$

I. I. S.

E. G. 897. Să se stabilească relațiile:

$$2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1-x^k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1+x^k}{1-x^k}+n$$

$$2\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{1-x^k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1+x^k}{1-x^k}-n$$

C. I. Ț.

E. G. 898. Să se arate că

$$\sum_{k=1}^{n}\sin\left(ka+\frac{\pi}{4}\right)=\sum_{k=1}^{n}\cos\left(ka-\frac{\pi}{4}\right)=2\frac{\sin\frac{na}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\cdot\cos\left[\frac{(n+1)a}{2}-\frac{\pi}{4}\right].$$

ARISTIDE I. DELEANU.

E. G. 899. Dacă înălțimile $h_a < h_b < h_c$ ale unui triunghiu sunt în progresie aritmetică, să se arate că bisectoarea corespunzătoare înălțimii mijlocii este dată de relația

$$l_b = b\cos\frac{B}{2}.$$

PETRE P. TEODORESCU.

E. G. 900. Să se arate că dacă $A+B+C+D=2\pi$, atunci avem

$$tgA+tgB+tgC+tgD=tgA\ tgB\ tgC+tgA\ tgB\ tgD+$$
$$+tgA\ tgC\ tgD+tgB\ tgC\ tgD.$$

V. C.

Aritmetică şi teoria numerelor. *Exerc. 11.* Să se găsească o progresie aritmetică de 3 termeni ştiind că are suma egală cu un multiplu al termenului celui mai mic.

GH. B.

A. 12. Să se demonstreze că suma x^2+2xy este patrat perfect pentru o infinitate de valori ale lui x şi y.

GH. B.

A. 13. Să se afle sistemul de numeraţie în care s'a calculat produsul $16\times 43=752$.

I. I. S.

A. 14. Să se arate că expresia

$$E=2^3\cdot 10^{2n+3}+10^{2(n+1)}(1+n\cdot 10^{-n})+n(2^{n+4}\cdot 5^{n+1}+n)$$

este un patrat perfect. Verificare pentru $n=3$.

H. D.

A. 15. Oricare ar fi n, expresia:

$$E=1330^{2n+1}+2\times 969^{2n}-606^{2n-1}$$

este divizibilă cu 11.

E. M.

Drepturile de reproducere rezervate Societăţii «Gazeta Matematică».

INSTRUCȚIUNI

Pentru redactarea și trimiterea soluțiunilor exercițiilor publicate în *Gazeta Matematică Supliment cu exerciții* se vor avea în vedere *Instrucțiunile* publicate în primele două numere.

Abonamentul anual la Suplimentul cu Exerciții este de 360 Lei și se poate trimite pe adresa: Casa „Gazeta Matematică", Calea Griviței 158 București, prin mandat poștal sau cont CEC Nr. 26.220.

Elevii claselor IX, X și XI, cu bogată activitate la această revistă își pot lărgi cadrul activității rezolvând și probleme din „Gazeta Matematică".

In Biblioteca Societății „Gazeta Matematică" au apărut și se găsesc următoarele:

IV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediția a III-a. Revăzută și adăugită de *Gabriela Țițeica* . . . . . Lei 270

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. Istoric, învățăminte. Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 90

XIII. **I. Ionescu,** Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica rațională . . . . . Lei 450

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a (Trigonometrie sferică). Revăzută și adăogită de G-ralul **Gh. I. Liteanu.** Lei 130

XX. **I. I. Chițulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I . . . . . Lei 160

XXI. **M. Ghermănescu,** *Trigonometria plană și sferică cu aplicații la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . . Lei 450

XXII. **G. Țițeica,** *Culegere de Probleme de analitică.* Ediția II. Partea II adăogită de **N. G. Botea** și **C. Ionescu-Bujor** . . . . . Lei 230

XXIII. **Gazeta Matematică** 1895—1945 (Decada 5-a Istoric), învățăminte. Volum jubilar (288 pag.) . . . . . Lei 90

XXIV. **A. G. Ioachimescu,** *Mecanică rațională,* Curs predat la Școala Politehnică din București, revăzut și adăugit după îndrumările autorului, de *Gabriela Țițeica* și *Al. Stoenescu* . . . . . Lei 1.270

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărțile I — VI de Geometrie plană) tradusă din limba greacă de *V. Marian* . . . . . Lei 300

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărțile VII—IX de Aritmetică și Cartea X a Iraționalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 360

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărțile XI—XIII de Geometrie în spațiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE și Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 180

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE"
(Tipărită din fondul Anghel Saligny)

I. **Ion Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* (Ediția II-a) . . . . . Lei 90

Biblioteca Matematică „GEORGE ȚIȚEICA"

I. **Ion Ionescu,** *Maxime și minime geometrice* . . . . . Lei 230

Pentru volumele din Colecția și Biblioteca „Gazeta Matematică" de trimis în provincie se va plăti anticipat un plus de 15% din preț pentru taxele de expediție.

„Gazeta Matematică" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul începe dela 15 Septembrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentul costă . . Lei 800

M. O. IMPRIMERIA NAȚIONALA — C. 13.697